ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta Elektrotechnická
Katedra Teorie Obvodů

Semestrální práce z předmětu Matematické metody v teorii signálů

Jan Ingerle
xingerle@fel.cvut.cz

25. ledna 2001

1 Zadání:

Najděte diskrétní systém (přenos nebo diferenční rovnici), jehož výstup je roven dané periodické posloupnosti s periodou N při vstupu δ_0. Jak se chová sériové, resp. paralelní spojení dvou takových systémů se stejnou resp. nestejnou délkou periody výstupního signálu.

2 Řešení:

Teoretický základ

Z pohledu teorie systému se jedná o návrh diskrétních soustavy s nekonečnou impulsovou odezvou na mezi stability.

Impulsová odezva diskrétní soustavy bývá označována $h[n]$ a je reakcí soustavy na jednotkový impuls δ_0 definovaný jako

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Impulsová odezva slouží pro popis soustavy, platí:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[k-n] = x[n] * h[n], \tag{2}$$

kde $y[n]$ je výstupní signál, $x[n]$ vstupní signál, $h[n]$ je impulsová odezva soustavy a $*$ je znak pro konvoluci, jejíž definice je zřejmá z rovnice.

K dalšímu řešení bude třeba pracovat s přenosovou funkcí soustavy. Ta se u diskrétních systémů často značí H a definuje v z-rovině:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\{h[n]\}, \tag{3}$$

kde $H(z)$ je přenosová funkce, $Y(z)$ a $X(z)$ jsou obrazy posloupností $y[n]$ a $x[n]$ v z-rovině. $\mathcal{Z}$ je znak z-transformace.

Z-transformace posloupnosti f_n je definována vztahem:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \tag{4}$$

za předpokladu, že řada konverguje. Podmínky konvergence i vlastnosti z-transformace jsou uvedeny např. v [3]

Analýzou přenosové funkce $H(z)$ lze vyšetřit stabilitu soustavy. Podmínka stability vyplývá z následující úvahy:

Stabilní soustava je taková soustava, jejíž odezva na omezený vstup je rovněž omezená:

$$|y_n| = |\sum_{k=0}^{n} h_k f_{n-k}| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty, \tag{5}$$

z čehož vyplývá, že soustava je stabilní, pokud pro její h_k platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty. \tag{6}$$

Vzhledem k tomu, že $h_n = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$, vede podmínka stability na požadavek existence $H(z)$ v oblasti $|z| \geq 1$, což znamená, že všechny póly funkce $H(z)$ musí ležet uvnitř jednotkové kružnice.

Pokud jsou póly $H(z)$ umístěny vně jednotkové kružnice ($|z| > 1$), jedná se o nestabilní soustavu. Zvláštní případ nastává pokud jsou póly umístěny na jednotkové kružnici ($|z| = 1$), v tomto případě se soustava pohybuje na mezi stability a její impulsové odezvou je periodická funkce. Tvar takové impulsové odezvy je, stejně jako v ostatních případech dán polohou nul a pólů přenosové funkce.

Při řešení zadaného problému budeme tedy hledat soustavu, jejíž přenosová funkce bude mít v z-rovině rozloženy póly na jednotkové kružnici. Rozložení nul funkce bude záviset na požadované výstupní posloupnosti.

Vlastní řešení

Rozdělme nyní řešení problému na dvě varianty: 1. výstupní posloupnost $y[n]$ je popsána jednou periodou periodické funkce $f[n]$. 2. jednotlivé prvky jedné periody výstupní posloupnosti $y[n]$ jsou dány výčtem.

ad 1. V tomto případě lze použít jednoduché řešení vycházející z faktu, že funkce $f[n]$ je periodická funkce a tudíž plně popisuje námi požadovanou výstupní posloupnost $y[n]$ i vně zadaného intervalu. Dále vycházejme z rovnice [2]: známe vstupní signál $x[n] = \delta_0$ a výstupní signál $y[n] = f[n]$, hledáme posloupnost $h[n]$. Řešení lze zjednodušit transformací do z-roviny, kdy rovnice [2] přechází na rovnici [3]. V tomto případě nám stačí určit obrazy $X(z)$ a $Y(z)$ a prostým dělením získáme přenosovou funkci $H(z)$, která plně popisuje danou soustavu.

Z definice z-transformace je zřejmé, že $\mathcal{Z}\{\delta_0\} = 1$ a tak jedinou nutnou podmínkou pro získání přenosové funkce tímto způsoben je existence obrazu výstupní posloupnosti $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$. Platí:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y[n]\}}{\mathcal{Z}\{\delta_0\}} = \frac{\mathcal{Z}\{y[n]\}}{1} = \mathcal{Z}\{y[n]\}, \tag{7}$$

pokud obraz $\mathcal{Z}\{y[n]\}$ existuje.

Diferenční rovnici soustavy získáme zpětnou z-transformací přenosové funkce.

ad 2. Pokud je výstupní posloupnost dána výčtem prvků f_n jedné periody, lze nahlížet na požadovanou posloupnost $y[n]$ jako na výsledek konvoluce dvou signálů:

$$y[n] = y_1[n] * y_2[n], \tag{8}$$

kde $y_1[n] = \{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ je posloupnost délky N popisující jednu periodu výstupní posloupnosti a $y_2[n]$ je nekonečná posloupnost jednotkových impulsu proložených $N-1$ nulami:

$$y_2[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi jnk}{N}}, \tag{9}$$

Pro určení přenosové funkce soustavy je třeba, stejně jako v předchozím případě, určit z-transformaci posloupnosti $y[n]$ (viz. [7]). Vzhledem k vlastnostem transformace lze najít obrazy $Y_1(z)$ a $Y_2(z)$ a výsledný obraz posloupnosti získat součinem těchto dílčích obrazů:

$$Y(z) = Y_1(z)\,Y_2(z). \tag{10}$$

Obraz $Y_1(z)$ získáme přímo z definice z-transformace [4]:

$$Y_1(z) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{-n}. \tag{11}$$

Určení obrazu $Y_2(z)$ lze jednoduše provést úvahou: posloupnost $y_2[n]$ je výstup oscilátoru s diferenční rovnice $y[n] = x[n] + y[n-N]$. Přenosová funkce takového systému má N pólů rovnoměrně rozložených na jednotkové kružnici a nulový bod N-tého řádu v nule:

$$Y_2(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} = \frac{1}{1 - z^{-N}}. \tag{12}$$

Výsledná přenosová funkce je pak:

$$Y(z) = Y_1(z)\,Y_2(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{-n}}{1 - z^{-N}}. \tag{13}$$

Z rovnice [7] pak pro přenosovou funkci soustavy plyne:

$$H(z) = Y(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{-n}}{1 - z^{-N}}. \tag{14}$$

Diferenční rovnici soustavy získáme zpětnou z-transformací přenosové funkce. V tomto případě bude mít obecně tvar:

$$y[n] - y[n-N] - \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, x[n-k] = 0. \tag{15}$$

Příklady

Uveďme pro každou metodu jeden demonstrační příklad.

Příklad 1: Najděte přenosovou funkci soustavy jejíž impulsová odezva $h_k = \sin(\frac{2\pi n f}{f_s})$, kde $f = 400$, $f_s = 8000$ a $n = 1, \ldots, 20$.

Řešení: Řešení první metodou je nasnadě: podle [7] stačí určit obraz h_k v z-rovině (viz. literatura [3]):

$$\mathcal{Z}\{\sin(\beta n + \varphi)\} = \frac{z[z \sin\varphi + \sin\beta - \varphi]}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}, \tag{16}$$

dosazením zadaných hodnot získáme přenosovou funkci ve tvaru:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi n}{10})\} = \frac{z \sin(\frac{\pi n}{10})}{z^2 - 2z\cos(\frac{\pi n}{10}) + 1}. \tag{17}$$

Tuto soustavu lze nasimulovat na počítači například v systému `MatLAB` — jedná se filtr s dopřednými vazbami $B = [0; \sin(\frac{\pi n}{10})]$ a zpětnými vazbami $A = [1; -2\cos(\frac{\pi n}{10}); 1]$. Impulsová charakteristika soustavy je na obrázku 1, rozložení na obrázku 2.

Příklad 2: Najděte diferenční rovnici soustavy jejíž impulsovou odezvou je periodická posloupnost s periodou $y_n = \{1, 2, 4, 2, 0\}$.

Řešení: Délka periody N je dána délkou zadané posloupnosti: $N = 5$. Dosazením do [14] sestavíme přenosovou funkci soustavy:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z + 4z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - z^{-5}} \tag{18}$$

Rozkladem a zpětnou z-transformací najdeme diferenční rovnici soustavy:

$$Y(z)(1 - z^{-5}) = X(z)(1 + 2z + 4z^{-2} + 2z^{-3}), \tag{19}$$

$$y[n] - y[n-5] = x[n] + 2x[n-1] + 4x[n-2] + 2x[n-3]. \tag{20}$$

Simulací soustavy s dopřednými vazbami $B = [1; 2; 4; 2; 0]$ a zpětnými vazbami $A = [1; 0; 0; 0; 0; -1]$ v `MatLAB`u jsme opět získali obrázky charakterizující danou soustavu. Na obrázku 3 je opět impulsová odezva soustavy a na obrázku 4 je rozložení nul a pólů v z-rovině.

Závěr

V práci byly ukázány dvě poměrně jednoduché metody návrhu soustav na mezi stability s požadovanou impulsovou odezvou. Základní odvození a popisy postupů byly demonstrovány na jednoduchých příkladech. Ty ukazují, že řešení splňuje požadavky uvedené v zadání. Zbývá tedy diskutovat chování soustav složených paralelním, popřípadě sériovým řazením zmiňovaných soustav.

Zabývejme se nejprve spojováním soustav obecněji. Pokud mají dvě soustavy stejný vstup a spojíme je paralelně, díky distributivnosti konvoluce, kterou lze dokázat z definice konvoluce, platí:

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]), \tag{21}$$

dochází tedy ke sčítání impulsových odezev obou soustav. Z linearity z-transformace je pak zřejmé, že dochází i ke sčítání příslušných přenosových funkcí:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_1[n] + h_2[n]\} = \mathcal{Z}\{h_1[n]\} + \mathcal{Z}\{h_2[n]\}. \tag{22}$$

Pokud jsou soustavy řazeny sériově, platí, díky opět z definice dokazatelné asociativnosti konvoluce, vztah:

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]), \tag{23}$$

Z vlastností z-transformace je pak zřejmé:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_1[n] * h_2[n]\} = \mathcal{Z}\{h_1[n]\}\,\mathcal{Z}\{h_2[n]\}. \tag{24}$$

Dříve než uvedeme pro nás důležité závěry vyplývající z rovnic [21] – [24] podotkněme, že pro tyto závěry předpokládáme, že soustavy mají vlastnosti uvažované v zadání. Znamená to, že mají diskrétní periodickou impulsovou odezvu. Dále předpokládáme, že obě soustavy mají stejný krok diskretizace, což předem vylučuje stav, kdy by podíl period impulsových charakteristik byl iracionálním číslem.

Pokud tedy řadíme takové soustavy paralelně, dochází ke sčítání impulsových odezev. Za výše uvedených podmínek systém samozřejmě zůstane na mezi stability a pokud bude splněna podmínka rovnosti period sčítaných impulsových odezev, nezmění se ani perioda výsledné impulsové odezvy. Pokud periody nejsou stejné, bude nová perioda dána nejnižším společným násobkem period dílčích funkcí.

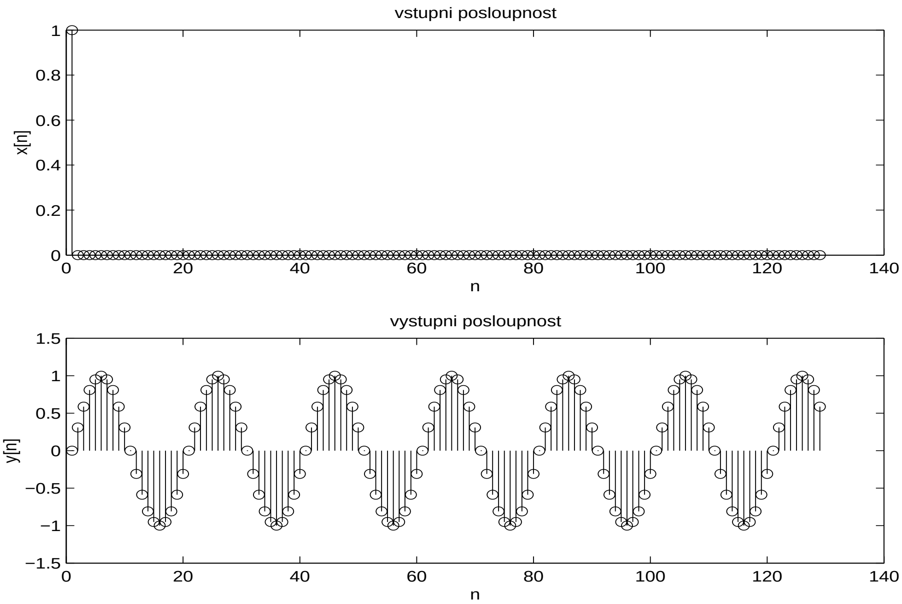
Pokud budeme řadit soustavy sériově, násobíme frekvenční charakteristiky soustav a provádíme konvoluci impulsových odezev. Vzhledem k tomu, že dochází ke konvoluci dvou nekonečných řad (periodického buzení soustavy s její impulsovou charakteristikou), je zřejmé, že v tomto případě soustava není stabilní.

Reference

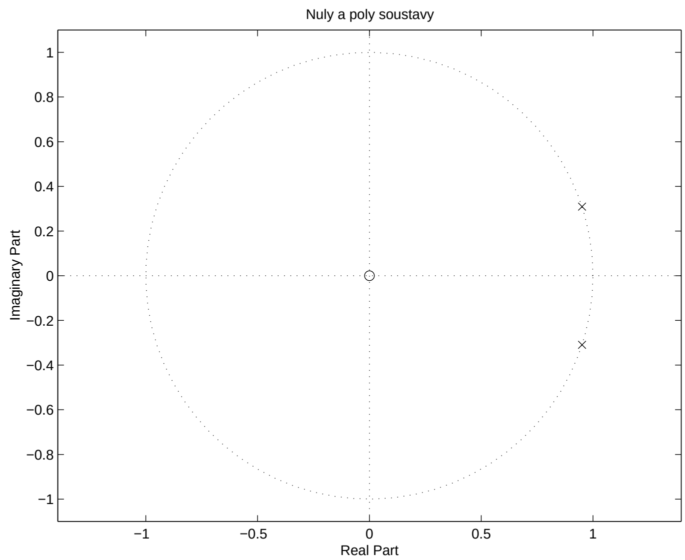
[1] Sovka, Pavel: *Přednášky z předmětů Algoritmy zpracování signálů*

[2] Uhlíř, J., Sovka, P.: *Číslicové zpracování signálů*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1995

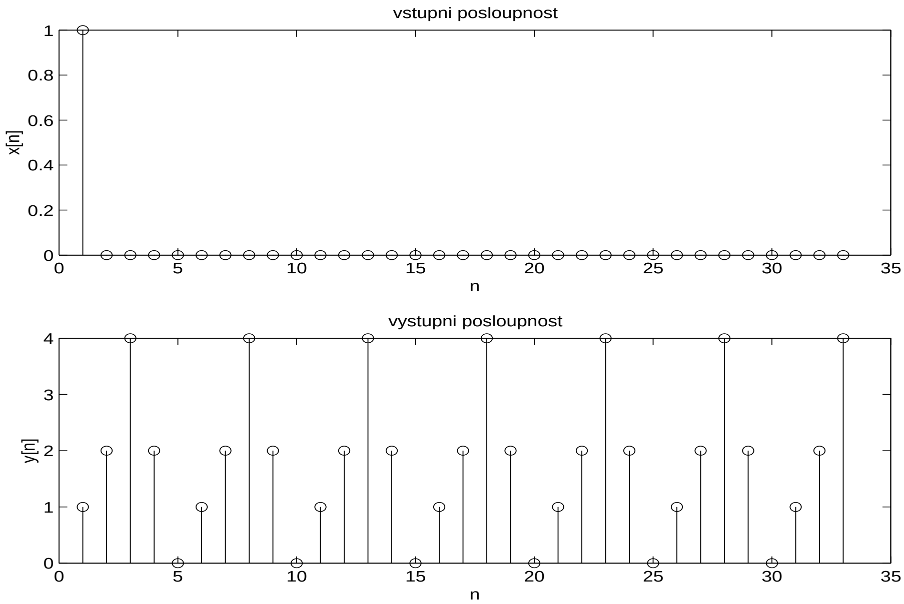
[3] Vích, Robert: *Transformace Z a některá její použití*, SNTL Praha, 1979



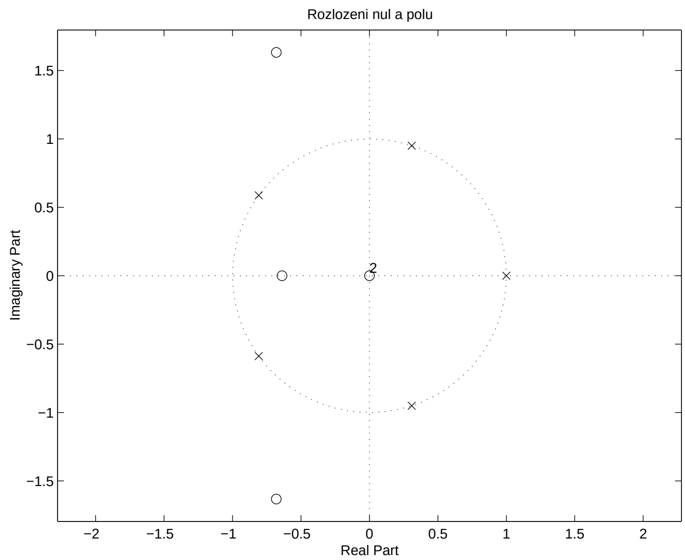
Obrázek 1: Impulsová odezva soustavy z příkladu 1



Obrázek 2: Rozložení nul a pólů soustavy z příkladu 1



Obrázek 3: Impulsová odezva soustavy z příkladu 2



Obrázek 4: Rozložení nul a pólů soustavy z příkladu 2